Ableitungen im Kalkül des Natürlichen Schließens

Beispiele für typische Rechenwege in der Fitch-Notation

Wie viele Logik-Kalküle setzt auch der Kalkül des Natürlichen Schließens (NK, nach Jaśkowski und Gentzen) beim Ableiten eine gewisse Intuition bzw. einen bestimmten ›Blick‹ für geschicktes Vorgehen voraus. Dieser lässt sich gleich der Urteilskraft nur durch Übung schulen – aber wo beginnen? Um einen solchen Einstieg zu erleichtern, habe ich auf den folgenden Seiten einige einfache und zugleich ›typische‹ Beispiele für NK-Ableitungen zusammengestellt: sie verdeutlichen nicht nur geläufige Strategien, sondern begegnen auch immer wieder als Elemente bzw. *Teilableitungen* schwieriger Ableitungen (indem wir für A, B etc. komplexe Formeln einsetzen!), so dass sie auch als Handwerkszeug nützlich sein mögen. Die verwandte Notation geht auf Frederic B. Fitch (*Symbolic Logic*, New York: Roland 1952) zurück; gegenüber anderen NK-Schreibweisen hat sie handfeste Vorteile, vor allem erinnert sie uns stets an noch zu löschende Hilfsannahmen. Trotzdem ist auch sie nicht unmittelbar verständlich; besonders die sequentiellen Teilableitungen, wie sie die Regeln (∨B) und (↔E) benutzen, werden durch einige Beispiele hoffentlich deutlicher.

Roman Eisele • Fassung: 2. ii. 2003 • Siehe: www.roman-eisele.de/phil/

Erstens zeigen wir den involutorischen Charakter der Negation: $A \dashv\vdash \neg\neg A$, indem wir beide Richtungen einzeln herleiten. Dieses doppelte Beispiel verdeutlicht das Grundprinzip der beiden NK-Regeln (¬B) und (¬E) für die Negation, die beide auf der klassischen *reductio ad absurdum* beruhen – hier jeweils im einfachsten denkbaren Fall.

(I a) $A \vdash \neg\neg A$:

1	A		Primärannahme
2		$\neg A$	Hilfsannahme
3		A	1 (R)
4		$\neg A$	2 (R)
5	$\neg\neg A$		2, 3≻≺4 (¬E)

(I b) $\neg\neg A \vdash A$:

1	$\neg\neg A$		Primärannahme
2		$\neg A$	Hilfsannahme
3		$\neg A$	2 (R)
4		$\neg\neg A$	1 (R)
5	A		2, 3≻≺4 (¬B)

Jetzt ein doppeltes Beispiel für die Ausbeutung des *ex falso quodlibet* in NK. Nach diesem Muster kann ich aus einer kontradiktorischen Formel – hier als Beispiel $(A \wedge \neg A)$ – jede beliebige Formel ableiten – hier B, indem ich mit ¬B beginne, oder ¬B, indem ich mit B beginne. Statt B kann natürlich jede beliebig komplexe Formel gewonnen werden.

(II a) $\bot \vdash B$:

1	$A \wedge \neg A$		Primärannahme
2		$\neg B$	Hilfsannahme
3		A	1 (∧B)
4		$\neg A$	1 (∧B)
5	B		2, 3≻≺4 (¬B)

(II b) $\bot \vdash \neg B$:

1	$A \wedge \neg A$		Primärannahme
2		B	Hilfsannahme
3		A	1 (∧B)
4		$\neg A$	1 (∧B)
5	$\neg B$		2, 3≻≺4 (¬E)

Zwei Grundeigenschaften der Implikation, zur Einführungsregel (→E). Jede Formel, die (ob selbst oder unter gegebenen Voraussetzungen) gültig ist, ist dies natürlich auch unter beliebigen zusätzlichen Bedingungen. Deshalb können wir jede Formel in das *Consequens* einer Implikation verwandeln. Umgekehrt lässt sich aus einer beliebigen negierten Formel das *Antecedens* einer Implikation gewinnen (oder wir machen eine positive zum negierten *Antecedens*!)

(III a) $A \vdash B \rightarrow A$:

1	A	Primärannahme
2	$\mid B$	Hilfsannahme
3	$\mid A$	1 (R)
4	$B \rightarrow A$	2, 3 (→E)

(III b) $\neg A \vdash A \rightarrow B$:

1	$\neg A$	Primärannahme
2	$\mid A$	Hilfsannahme
3	$\mid \mid \neg B$	Hilfsannahme
4	$\mid \mid A$	2 (R)
5	$\mid \mid \neg A$	1 (R)
6	$\mid B$	3, 4≻≺5 (¬B)
7	$A \rightarrow B$	2, 6 (→E)

Die Verwendung des *Modus tollens* in NK verdeutlicht folgendes Beispiel; für den *Modus ponens* ist kein Beispiel erforderlich, da er direkt von der Regel (→B) ausgedrückt wird, also (wie bei vielen Kalkülen) ›eingebaut‹ ist.

(IV) $A \rightarrow B, \neg B \vdash \neg A$:

1	$A \rightarrow B$	Primärannahme
2	$\neg B$	Primärannahme
3	$\mid A$	Hilfsannahme
4	$\mid B$	1, 3 (→B): MP
5	$\mid \neg B$	2 (R)
6	$\neg A$	3, 4≻≺5 (¬E)

Das folgende Doppel-Beispiel zeigt weitere Eigenschaften der Implikation (jetzt negiert) und macht zudem deutlich, wie eine komplexe, geschachtelte Ableitung mit Teilableitungen in NK funktioniert – Vorsicht ist geboten! Gerade Beispiel (V b) zeigt, dass die Reihenfolge der Anwendung der Regeln von NK gelegentlich *tricky* ist: einfachere, scheinbar zielstrebigere Lösungswege funktionieren nicht bzw. verfallen in illegale Regelanwendungen …

(V a) $\neg(A \rightarrow B) \vdash \neg B$:

1	$\neg(A \rightarrow B)$	Primärannahme
2	$\mid B$	Hilfsannahme
3	$\mid \mid A$	Hilfsannahme
4	$\mid \mid B$	2 (R)
5	$\mid A \rightarrow B$	3, 4 (→E)
6	$\mid \neg(A \rightarrow B)$	1 (R)
7	$\neg B$	2, 5≻≺6 (¬E)

(V b) $\neg(A \rightarrow B) \vdash A$:

1	$\neg(A \rightarrow B)$	Primärannahme
2	$\neg A$	Hilfsannahme
3	A	Hilfsannahme
4	$\neg B$	Hilfsannahme
5	A	3 (R)
6	$\neg A$	2 (R)
7	B	4, 5$\succ\!\prec$6 ($\neg$B)
8	$A \rightarrow B$	3, 7 ($\rightarrow$E)
9	$\neg(A \rightarrow B)$	1 (R)
10	A	2, 8$\succ\!\prec$9 ($\neg$B)

Noch ein Beispiel für das Zusammenspiel von ($\rightarrow$B) mit ($\rightarrow$E); interessant ist daran, dass es zeigt, wie die Seitenlinie einer Teilableitung nicht unbedingt an die Fußlinie einer übergeordneten Annahme anschließen muss:

(VI) $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \vdash A \rightarrow C$:

1	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)$	Primärannahme
2	$A \rightarrow B$	1, ($\wedge$B)
3	$B \rightarrow C$	1, ($\wedge$B)
4	A	Hilfsannahme
5	B	2, 4 ($\rightarrow$B): MP
6	C	3, 5 ($\rightarrow$B): MP
7	$A \rightarrow C$	4, 6 ($\rightarrow$E)

Nach diesen Beispielen für die geschachtelte Verwendung von Teilableitungen nun solche für die sequentielle Verwendung von Teilableitungen auf gleicher Ebene, wie sie die Regeln ($\vee$B) und ($\leftrightarrow$E) erfordern. Die Darstellung erscheint zunächst seltsam: man muss hier sehr aufpassen, dass man die beiden Teilableitungen nicht etwa (z. B. durch versehentliches Durchziehen ihrer Seitenlinie!) unzulässig vermischt. Zunächst eine Demonstration von ($\leftrightarrow$E):

(VII) $A \rightarrow B, B \rightarrow A \vdash A \leftrightarrow B$:

1	$A \rightarrow B$	Primärannahme
2	$B \rightarrow A$	Primärannahme
3	A	Hilfsannahme
4	B	1, 3 ($\rightarrow$B): MP
5	B	Hilfsannahme
6	A	2, 5 ($\rightarrow$B): MP
7	$A \leftrightarrow B$	3–4, 5–6 ($\leftrightarrow$E)

Die folgenden Beispiele zeigen die Kommutativität der Junktoren $\wedge$, $\vee$ und $\leftrightarrow$. In (b) wird die Liberalität von ($\vee$E) deutlich, in (a) und (c) die syntaktische Strenge von NK: die Schrittfolge sollte jeweils wie angegeben eingehalten werden, sonst wäre das Ergebnis (streng genommen) wieder identisch mit der Primärannahme!

(VIII a) $A \wedge B \vdash B \wedge A$:

1	$A \wedge B$		Primärannahme
2	B		1 ($\wedge$B)
3	A		1 ($\wedge$B)
4	$B \wedge A$		2, 3 ($\wedge$E)

(VIII b) $A \vee B \vdash B \vee A$:

1	$A \vee B$		Primärannahme
2		A	Hilfsannahme
3		$B \vee A$	2 ($\vee$E)
4		B	Hilfsannahme
5		$B \vee A$	4 ($\vee$E)
6	$B \vee A$		1, 2–3, 4–5 ($\vee$B)

(VIII c) $A \leftrightarrow B \vdash B \leftrightarrow A$:

1	$A \leftrightarrow B$		Primärannahme
2		B	Hilfsannahme
3		A	1, 2 ($\leftrightarrow$B)
4		A	Hilfsannahme
5		B	1, 4 ($\leftrightarrow$B)
6	$B \leftrightarrow A$		2–3, 4–5 ($\leftrightarrow$E)

Jetzt ein Exempel für das Zusammenspiel von ($\rightarrow$B) und ($\vee$B) – offenbar eher simpel.

(IX) $A \vee B, A \rightarrow B \vdash B$:

1	$A \vee B$		Primärannahme
2	$A \rightarrow B$		Primärannahme
3		A	Hilfsannahme
4		B	2, 3 $\rightarrow$B): MP
5		B	Hilfsannahme
6		B	5 (R)
7	B		1, 3–4, 5–6 $\vee$B

Manche einfachen Dinge sind in NK nicht selbstverständlich. Als Beispiel für häufig benötigte Beziehungen beweisen wir zwei Ableitung aus Kon- und Disjunktion, zugleich nützliche Bausteine für komplexe Ableitungen:

(X a) $A \vee B, \neg A \vdash B$:

1	$A \vee B$			Primärannahme
2	$\neg A$			Primärannahme
3		A		Hilfsannahme
4			$\neg B$	Hilfsannahme
5			A	3 (R)
6			$\neg A$	2 (R)
7		B		4, 5≻≺6 (¬B)
8		B		Hilfsannahme
9		B		8 (R)
10	B			1, 3–7, 8–9 (∨B)

Ganz analog wäre natürlich $A \vee B, \neg B \vdash A$ abzuleiten.

(X b) $\neg(A \wedge B), A \vdash \neg B$:

1	$\neg(A \wedge B)$		Primärannahme
2	A		Primärannahme
3		B	Hilfsannahme
4		$A \wedge B$	2, 3 (∧E)
5		$\neg(A \wedge B)$	1 (R)
6	$\neg B$		3, 4≻≺5 (¬E)

Ganz analog wäre natürlich $\neg(A \wedge B), B \vdash \neg A$ abzuleiten.

Die Kommutativität von ∧, ∨ und ↔ haben wir oben gezeigt. Wie steht es aber mit der Assoziativität von ∧, ∨, ↔? Schon schwieriger! Wir geben die Beispiele für ∧ und ∨, jeweils in einer Richtung (die andere wäre ja analog). Speziell (b) ist wegen unserer verschränkten Verwendung der (∨B)-Regel lehrreich.

(XI a) $A \wedge (B \wedge C) \vdash (A \wedge B) \wedge C$:

1	$A \wedge (B \wedge C)$	Primärannahme
2	A	1 (∧B)
3	$B \wedge C$	1 (∧B)
4	B	3 (∧B)
5	$A \wedge B$	2, 4 (∧E)
6	C	3 (∧B)
7	$(A \wedge B) \wedge C$	5, 6 (∧E)

(XI b) $A \lor (B \lor C) \vdash (A \lor B) \lor C$:

1	$A \lor (B \lor C)$			Primärannahme
2		A		Hilfsannahme
3		$A \lor B$		2 (∨E)
4		$(A \lor B) \lor C$		3 (∨E)
5		$B \lor C$		Hilfsannahme
6			B	Hilfsannahme
7			$A \lor B$	6 (∨E)
8			$(A \lor B) \lor C$	7 (∨E)
9			C	Hilfsannahme
10			$(A \lor B) \lor C$	9 (∨E)
11		$(A \lor B) \lor C$		5, 6–8, 9–10 (∨B)
12	$(A \lor B) \lor C$			1, 2–4, 5–11 (∨B)

(XI c) $A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C) \vdash (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$: *is left as an exercise to the reader* (anspruchsvoll!).

Allmählich wird deutlich, wie wir alle Grundgesetze der Aussagenlogik in NK zeigen *oder* aber (noch nützlicher) für NK-Herleitungen benutzen können. Ich gebe als Beispiel die häufig benötigten Gesetze von De Morgan. Zugleich zeigt (aa) die Verwendung bereits bewiesener Beziehungen als praktische »Abkürzung« für Teilableitungen.

(XII aa) $\neg A \land \neg B \vdash \neg(A \lor B)$:

1	$\neg A \land \neg B$		Primärannahme
2		$A \lor B$	Hilfsannahme
3		$\neg A$	1 (∧B)
4		B	2, 3 (Bsp. X a)
5		$\neg B$	1 (∧B)
6	$\neg(A \lor B)$		2, 4≻≺5 (¬E)

(XII ab) $\neg(A \lor B) \vdash \neg A \land \neg B$:

1	$\neg(A \lor B)$		Primärannahme
2		A	Hilfsannahme
3		$A \lor B$	2 (∨E)
4		$\neg(A \lor B)$	1 (R)
5	$\neg A$		2, 3≻≺4 (¬E)
6		B	Hilfsannahme
7		$A \lor B$	6 (∨E)
8		$\neg(A \lor B)$	1 (R)
9	$\neg B$		6, 7≻≺8 (¬E)
10	$\neg A \land \neg B$		5, 9 (∧E)

Aus (XII aa) und (XII ab) ergibt sich also: $\neg A \land \neg B \dashv\vdash \neg(A \lor B)$

(XII ba) $\neg A \lor \neg B \vdash \neg(A \land B)$:

1	$\neg A \lor \neg B$	Primärannahme
2	$\quad \neg A$	Hilfsannahme
3	$\quad\quad A \land B$	Hilfsannahme
4	$\quad\quad A$	3 ($\land$B)
5	$\quad\quad \neg A$	2 (R)
6	$\quad \neg(A \land B)$	3, 4$\succ\!\prec$5 ($\neg$E)
7	$\quad \neg B$	
8	$\quad\quad A \land B$	Hilfsannahme
9	$\quad\quad B$	8 ($\land$B)
10	$\quad\quad \neg B$	7 (R)
11	$\quad \neg(A \land B)$	8, 9$\succ\!\prec$10 ($\neg$E)
12	$\neg(A \land B)$	1, 2–6, 7–11 ($\lor$B)

(XII bb) $\neg(A \land B) \vdash \neg A \lor \neg B$:

1	$\neg(A \land B)$	Primärannahme
2	$\quad \neg(\neg A \lor \neg B)$	Hilfsannahme
3	$\quad\quad \neg A$	Hilfsannahme
4	$\quad\quad \neg A \lor \neg B$	3 ($\lor$E)
5	$\quad\quad \neg(\neg A \lor \neg B)$	2 (R)
6	$\quad A$	3, 4$\succ\!\prec$5 ($\neg$B)
7	$\quad\quad \neg B$	Hilfsannahme
8	$\quad\quad \neg A \lor \neg B$	7 ($\lor$E)
9	$\quad\quad \neg(\neg A \lor \neg B)$	2 (R)
10	$\quad B$	7, 8$\succ\!\prec$9 ($\neg$B)
11	$\quad A \land B$	6, 10 ($\land$E)
12	$\quad \neg(A \land B)$	1 (R)
13	$\neg A \lor \neg B$	2, 11$\succ\!\prec$12 ($\neg$B)

Aus (XII ba) und (XII bb) ergibt sich also: $\neg A \lor \neg B \dashv\vdash \neg(A \land B)$

Ein Folge von Zusammenhängen zwischen Implikation und Disjunktion, je in beide Richtungen:

(XIII aa) $A \lor B \vdash \neg A \to B$:

1	$A \lor B$	Primärannahme
2	$\quad \neg A$	Hilfsannahme
3	$\quad B$	1, 2 (Bsp. X a)
4	$\neg A \to B$	2, 3 ($\to$E)

Dieses Beispiel bietet eine gewiss nützliche Möglichkeit zur $\lor$-Beseitigung, die in manchen Fällen besser passen dürfte als die direkte Verwendung der umständlich-eingeschränkte ($\lor$B)-Regel.

(XIII ab) $\neg A \rightarrow B \vdash A \vee B$:

1	$\neg A \rightarrow B$		Primärannahme
2		$\neg(A \vee B)$	Hilfsannahme
3		$\neg A \wedge \neg B$	2 (Bsp. XII ab): DM
4		$\neg A$	3 ($\wedge$B)
5		B	1, 4 ($\rightarrow$B): MP
6		$\neg B$	3 ($\wedge$B)
7	$A \vee B$		2, 5$\succ\!\prec$6 ($\neg$B)

Dieses Beispiel scheint nützlich, insofern es uns eine weitere Möglichkeit zur $\vee$-Gewinnung neben der ($\vee$E)-Regel bietet. Wann immer ich unter einer Annahme $\neg A$ eine Formel B ableiten kann – A, B beliebig komplex –, kann ich ($A \vee B$) gewinnen. Typische Form:

m		$\neg A$	Primärannahme
…		… … …	
n		B	… … …
n+1	$\neg A \rightarrow B$		($\rightarrow$E)
n+2	$A \vee B$		(Bsp. XIII ab)

Aus (XIII aa) und (XIII ab) ergibt sich also: $\neg A \rightarrow B \dashv\vdash A \vee B$

(XIII ba) $\neg A \vee B \vdash A \rightarrow B$

1	$\neg A \vee B$		Primärannahme
2		A	Hilfsannahme
3		$\neg\neg A$	2 (Bsp. I a): DN
4		B	1, 3 (Bsp. X a)
5	$A \rightarrow B$		2, 4 ($\rightarrow$E)

(XIII bb) $A \rightarrow B \vdash \neg A \vee B$

1	$A \rightarrow B$		Primärannahme
2		$\neg(\neg A \vee B)$	Hilfsannahme
3		$\neg\neg A \wedge \neg B$	2 (Bsp. XII ab): DM
4		$\neg\neg A$	3 ($\wedge$B)
5		A	4 (Bsp. I b): DN
6		B	1, 5 ($\rightarrow$B): MP
7		$\neg B$	3 ($\wedge$B)
8	$\neg A \vee B$		2, 6$\succ\!\prec$7 ($\neg$B)

Aus (XIII ba) und (XIII bb) ergibt sich also: $\neg A \vee B \dashv\vdash A \rightarrow B$