
Strategemata deductionis

Saloppe Erläuterungen, wie man auf diese Ableitungen kommen könnte

(Stand: 2. ii. 2003)

Beispiele sind ja etwas nettes – laut Kant fördern sie die *ästhetische Deutlichkeit* –: aber wie findet man denn nun eine solche Ableitung in NK? Leider gehört dazu einige Intuition, die freilich nicht direkt lehr/lernbar ist; Verstehen, Nachvollziehen, Üben sowie – Scheitern und Neuanfang zusammengenommen werden am ehesten zu ihr führen.

Für das Verstehen und Nachvollziehen habe ich die vorhergehenden Beispiele zusammengestellt; freilich hat manches von ihnen einiges Grübeln erfordert, und so könnte es vielleicht zu einer weiteren Hilfe werden, wenn wir an eben diesen Beispielen schrittweise erläutern, wie man auf die angegebene Herleitung kommen könnte. Wohlgermerkt, *könnte* – NK ist kein mechanisches Verfahren, und so sind bei jeder non-trivialen Ableitung einfach Versuchen und Ausprobieren nötig. Manchmal klappt der erste, manchmal erst der zehnte Versuch.

Im schrittweisen Nachvollziehen solcher Beispiele entwickelt sich hoffentlich allmählich ein tieferes, quasi-intuitives Verständnis von NK, das auch bei der Lösung neuer Aufgaben den Weg weist.

TERMINOLOGIE

Der *Hauptjunkt* einer Formel ist, wie bekannt, der bei einer von außen nach innen fortschreitenden Zerlegung der Formel zuerst betrachtete Junkt. Das *Negat* einer Formel ist die ihr unmittelbar widersprechende Formel – im Falle einer nicht-negierten Formel A (deren Hauptjunkt nicht die Negation ist) die negierte Formel $\neg A$, im Falle einer negierten Formel $\neg A$ die nicht negierte Formel A . In diesem Sinne bezeichne ich im Folgenden als *Widerspruch* das Vorkommen einer Formel A und ihres Negates $\neg A$ als zwei einander zugängliche (i. A. heißt das: auf gleicher Ebene untereinander gelegene) Zeilen einer NK-(Teil)ableitung. Als *Tei*ableitung wird bekanntlich jeder gleich eingezogene Block einer NK-Ableitung bezeichnet, dessen Zeilen also unter derselben Annahme stehen. Teiableitungen können einander auf gleicher Ebene *sequentiell* folgen, wie es etwa die Regeln (\vee B) und (\leftrightarrow E) erfordern, oder aber beliebig *verschachtelt* sein: der Begriff der Teiableitung ist also rekursiv zu verstehen.

Zur Abkürzung führe ich folgende Zusatz-Konventionen ein. Sei also in NK zu zeigen: $A_1, \dots, A_n \vdash Z$. Dann nenne ich A_1, \dots, A_n , also die ersten, vorgegebenen Annahmen einer Ableitung, welche die äußerste Einrückungsebene regieren, *Primärannahmen* – die unter ihnen folgende Tei-

ableitung ist zugleich die Gesamtableitung. Alle weiteren, darunterstehende Teiableitungen regierende Annahmen nenne ich *Hilfsannahmen*. Als *Zielformel* bezeichne ich die letzte, herzuleitende Formelzeile Z ; die sie erzeugende, zuletzt angewandte Regel nenne ich *Zielregel*. In jeder untergeordneten Teiableitung gibt es demnach ebenfalls untergeordnete *Teiziel-Formeln* mit entsprechenden *Teiziel-Regeln*.

Ich verweise im Folgenden auf die Zeilennummern der Ableitungsbeispiele mit Ziffern in [eckigen Klammern]; natürlich kann ich diese Ziffern erst endgültig zuweisen, wenn ich mit einer Ableitung fertig bin – während des Ableitungsvorganges weiß ich natürlich noch nicht, wieviele Zeilen genau die Ableitung haben wird.

I

Schönes Beispiel einer *trivialen* Ableitung in NK ist (I a). Zuerst notiere ich – ob auf dem Papier oder gedanklich – die gegebene Annahme [1], dann weit darunter die herzuleitende Zielformel [5]; zwischen ihnen bleibt weißer Raum, den die Ableitung füllen muss. Aber wie?

Meine Zielformel ist $\neg\neg A$, der Hauptjunkt also eine Negation. Ich tippe daher, dass ich diese Formel wahrscheinlich (nicht sicher!) durch (\neg E) gewinne: dies wäre also die Zielregel. Das Schema derselben zeigt mir, dass ich zwischen Primärannahme und Zielformel eine Hilfsannahme mit einer Negation weniger, also $\neg A$ notieren muss [2]. Schon sehe ich das Skelett der Ableitung! Zwischen dieser Hilfsannahme und der Zielformel muss ich nun einen Widerspruch aufzeigen, d. h. zwei einander unmittelbar widersprechende Formelzeilen (*irgendwas*) und \neg (*irgendwas*) gewinnen. Woher? Ich schau ganz nach oben und finde als Primärannahme A . Das widerspricht bereits meiner Hilfsannahme: wunderbar! Also hole ich mir diese beiden Formelzeilen in meinen weißen Raum [3, 4] – dafür habe ich ja die Reiterationsregel (R) – und schon bin ich fertig, ich muss nur noch die Zeilennummern vergeben und das Ganze sauber auf- bzw. abschreiben.

Ich arbeite mich also generell von außen nach innen in die Ableitung hinein, indem ich das Gesamtproblem in kleinere Probleme, sprich: Teiableitungen zerlege.

(b) Analoges Vorgehen wie bei (a). Nur sehe ich diesmal, dass die Zielformel A [5] atomar ist, die Primärannahme [1] aber mit einer Negation beginnt. Daher vermute ich als Zielregel diesmal (\neg B). Der Rest wie bei (a).

II

(a) und (b): unser Vorgehen ähnelt dem bei (I a) und (I b) – da die Zielformel [5] jedesmal atomar oder eine verneinte atomare Formel ist, vermute ich wieder als Zielregel eine der Negationsregeln; dies wird bestätigt, wenn ich die Primärannahmen [1] betrachte: ich sehe auf einen Blick, dass sie einen Widerspruch enthalten, wie ich ihn für die Negationsregeln ja brauchen werde. Ich notiere also dazwischen als Hilfsannahme [2] das Negat der Zielformel; nun muss ich im Raum zwischen Hilfsannahme [2] und Zielformel [5] einen Widerspruch darstellen, den ich schlicht durch Analyse der Primärannahme bekomme.

III

(a) Die Zielformel [4] hat als Hauptjunktoren eine Implikation, weshalb ich als Zielregel (\rightarrow E) vermute. Um $B \rightarrow A$ herzuleiten, bräuchte ich also eine Hilfsannahme B [2] (schon mal notieren!), unter der ich dann irgendwie A herleite – dies ist aber, wenn ich nach oben schaue, just die Primärannahme, die ich nur mit (R) reitieren [3] muss. Fertig!

IV

Sehe ich meine beiden Primärannahmen [1, 2] an, so erkenne ich noch nicht unmittelbar, wie ich daraus meine Zielformel [6] gewinne. Notieren wir also wieder beides, mit leerem Raum dazwischen. Da die Zielformel $\neg A$ als Hauptjunktoren eine Negation hat, vermute ich wiederum, dass als Zielregel (\neg E) anzusetzen ist; ergo notiere ich zwischen Primärannahmen und Zielformel als Hilfsannahme A [3]. Nun muss ich zwischen Hilfsannahme und Zielformel zwei unmittelbar widersprüchliche Zeilen gewinnen; ich schaue nach oben, sehe, dass meine Hilfsannahme A [3] auch das Implikations-*Antecedens* der Primärannahme [1] ist, und notiere also unter der Hilfsannahme dank (\rightarrow B) schon einmal B [4]. Wieder sehe ich nach oben, erkenne in der anderen Primärannahme [2] das gesuchte Negat, ziehe sie mit (R) in meine Teilableitung [5] und bin – fertig.

ZWISCHENBILANZ

An dieser Stelle sollte man sich bewusst machen, dass ich für diese Darstellung natürlich alle Schritte künstlich separieren und diskret darstellen muss. In Wirklichkeit schweift beim Ableiten in NK der Blick ständig zwischen oben und unten, zwischen Annahmen und Zielformeln hin und her: ich arbeite quasi von außen nach innen, ich baue erst das Skelett einer Ableitung und ergänze dann nach innen vordringend die feineren Schritte.

Dies wird beibehalten, ja verstärkt, wenn ich wie bei den folgenden Beispielen komplexe Teilableitungen benötige:

immer muss ich versuchen, mein Problem in Teilprobleme zu zerlegen, die ich dann einzeln bearbeiten kann – unser Vorgehen ist also rekursiv. Scheitere ich bei einem Schritt, so gehe ich einen Schritt zurück und beginne diesen Teil erneut mit einer anderen Regel (*backtracking*). Da dieses Vorgehen i. A. von außen nach innen wirkt, besitzt eine NK-Ableitung quasi die Struktur eines Fraktals.

V

Dies bestätigt sich bei den verschachtelten Hilfsannahmen, wie sie Bsp. (V a) und – exzessiv – (V b) benötigen.

(a) Die Zielformel $\neg B$ ist negiert; mit hoher Wahrscheinlichkeit ist die Zielregel also (\neg E). Ich notiere zwischen Primärannahme [1] und Zielformel [7] also einmal als Hilfsannahme die unnegierte Version der Zielformel: B [2]. Im Raum zwischen Hilfsannahme [2] und Zielformel [7] muss ich einen Widerspruch herleiten. Wie? Hierbei kann mir nur die Primärannahme $\neg(A \rightarrow B)$ helfen; da ihr Hauptjunktoren eine Negation ist, ich also die Formel nur schwer zerlegen kann (höchstens per (\neg B), was aber eher unwahrscheinlich ist, da ich gerade schon (\neg E) verwende), scheint es einen Versuch wert, im Raum zwischen Hilfsannahme [2] und Zielformel [7] die nicht negierte Form $A \rightarrow B$ zu konstruieren, um so zwischen Konstrukt und Primärannahme als Ganzem den Widerspruch zu erhalten. Da der Hauptjunktoren von $A \rightarrow B$ eine Implikation ist, liegt es nahe, dass ich diese Zeile durch (\rightarrow E) gewinnen werde. Nun sehe ich bereits, dass mir das *Succedens* dafür, also B dank meiner Hilfsannahme [2] schon zur Verfügung steht; wie Beispiel (III) gezeigt hat, kann ich jede Formel rasch zum Succedens einer Implikation machen: Ich nehme, wie es (\rightarrow E) verlangt, rasch A als weitere Hilfsannahme [3] an, ziehe mir B durch Regel (R) in den Raum darunter [4], erhalte aus beidem mittels (\rightarrow E) das gesuchte $A \rightarrow B$ [5], instantiiere $\neg(A \rightarrow B)$ [6] aus der Primärannahme dank (R), habe also meinen Widerspruch [5] < [6] und bin – fertig.

(b) Funktioniert ähnlich, nur eine Stufe komplexer. Zielannahme A [10] ist atomar; typische Möglichkeiten zu ihrer Gewinnung wären (\rightarrow B), (\wedge B) oder (\neg B). Aber (\rightarrow B) würde $A \rightarrow B$ voraussetzen, was unwahrscheinlich ist angesichts der Tatsache, dass ich mit der Primärannahme $\neg(A \rightarrow B)$ beginne; für (\wedge B) sehe ich in der Annahme keine besondere Evidenz; also versuche ich Regel (\neg B). Meine erste Hilfsannahme [2] wäre demnach $\neg A$. Um (\neg B) zu begründen, muss ich im Zwischenraum einen Widerspruch aufzeigen. Wie? Nun scheint mir, wie zu (a) beschrieben, am Wahrscheinlichsten, dass der Widerspruch zwischen der Primärannahme als Ganzem und einer nicht-negierten Form $A \rightarrow B$ gelten wird. Also muss ich $A \rightarrow B$ konstruieren. Wiederum liegt es dafür am nächsten, (\rightarrow E) zu benutzen; also nehme ich als weitere Hilfsannahme A [3]. Um aber aus dieser Hilfsannahme $A \rightarrow B$ zu gewinnen, muss ich unter der

Hilfsannahme B herleiten. Woher? Hier werde ich ein wenig ratlos – denn an das B in meiner Primärannahme [1] komme ich nicht heran, eine weitere Hilfsannahme von B selbst könnte ich aber kaum wieder beseitigen. Da schweift mein verzweifelnder Blick nach oben und wird gewahr, dass ich eben zwei einander widersprechende Hilfsannahmen [2, 3] gemacht habe. Das könnte ein gesunder Menschenverstand für Irrsinn erklären, wenigstens für unnatürlich – aber im *Kalkül des Natürlichen Schließens* ist es so etwas das *Natürlichste* von der Welt, *schließlich* (sic!) erhalte ich daraus genau das Gesuchte: einen Widerspruch. Bei diesem Stichwort fallen mir (und Euch) die Negationsregeln ein, die ja Widersprüche erfordern – also kann ich das gesuchte B gewinnen, indem ich $\neg B$ annehme [4], dann mit (R) die beiden widersprechenden Zeilen darunter kopiere [5, 6], nun über $(\neg B) B$ [7] erhalte. Aus Hilfsannahme A [3] und B [7] erhalte ich $A \rightarrow B$ [8], dann kopiere ich die Primärannahme mit (R) in [9], erhalte meinen Widerspruch und habe wie vermutet die erste Hilfsannahme $\neg A$ durch $(\neg B)$ auf A reduziert. Juhu!

Von hier an muss ich mich aus Zeitgründen leider auf Stichworte beschränken.

VII, VIII A/B/C

In diesen Fällen vermute ich im Vergleich von Primärannahmen mit dem Hauptjunktoren der Zielformel, dass jeweils $(\vee B)$ bzw. $(\leftrightarrow E)$ anzuwenden sind. Diese Regeln geben jeweils ein ganz bestimmtes Gerüst vor, das ich sogleich eintragen kann. In diesen einfachen Fällen ergibt sich dann der Rest der Ableitung von selbst.

XII AB

Die Primärannahme [1] hat als Hauptjunktoren eine Negation, was wieder eine Zerlegung ausschließt; mein Verdacht ist sogleich, dass ich weiter unten einmal oder mehrfach die Regel $(\neg E)$ oder $(\neg B)$ anwenden muss, also das Negat $A \vee B$ der Primärannahme konstruieren und dann einen Widerspruch zeigen muss. Der Hauptjunktoren der Zielformel [10] ist eine Konjunktion, mit hoher Wahrscheinlichkeit kommt als Zielregel also $(\wedge E)$ in Frage; dies bedeutet, dass ich zwischen Primärannahme und Zielformel einzeln $\neg A$ [5] und $\neg B$ [9] muss (beachte die Reihenfolge!). Also trage ich diese Zeilen ein. Wie erhalte ich nun $\neg A$ [5]? Da dies ein verneintes Literal ist, liegt es nahe, an $(\neg E)$ zu denken; zudem habe ich ja bereits anfangs vermutet, dass ich früher oder später einen Widerspruch zur Primärannahme [1] aufzeigen muss. Also nehme ich als Hilfsannahme zur Herleitung von $\neg A$ [5] einfach A [2] an, muss nun dazwischen noch einen Widerspruch zeigen; da ich in der Primärannahme [1] $\neg(A \vee B)$ bereits eine Vorahnung sehe, gewinne ich aus A [2]

durch $(\vee E)$ einfach $A \vee B$ [3], kopiere darunter mit (R) einfach $\neg(A \vee B)$ aus [1], habe so meinen Widerspruch und also meine Ableitung bis zum $\neg A$ [5] gerechtfertigt. – Dasselbe Vorgehen wiederhole ich für die Herleitung von $\neg B$ [9], und endlich ist das Gerüst meiner Ableitung gefüllt.

XII BA

Ich betrachte Primärannahme und Zielformel. Entsprechend der Zielformel [12] mit dem Hauptjunktoren \neg vermute ich, dass die Zielregel $(\neg E)$ ist. Schau ich mir aber die Primärannahme an, deren Hauptjunktoren ein \vee ist, so nehme ich an, dass die ja sehr umfangreiche $(\vee B)$ -Regel eine wichtige Rolle spielen wird. Was ist also die Zielregel? Spätestens hier wird klar, dass in NK nicht immer alles hübsch deterministisch zugeht.

Ich entscheide mich (zugegebenermaßen einfach durch Münzenwurf oder durch Ausprobieren), als Zielregel $(\vee B)$ zu versuchen. Dadurch erhalte ich bereits ein sehr umfangreiches Gerüst oder Skelett für die Ableitung: ich notiere die Hilfsannahme $\neg A$ [2] und (nach viel freiem Raum) die aus ihr abgeleitete Zeile $\neg(A \wedge B)$ in [6]; ebenso die zweite Hilfsannahme $\neg B$ [7] und (nach viel freiem Raum) die aus ihr abgeleitete Zeile $\neg(A \wedge B)$ in [11]. Warum mache ich das? Nun, die $(\vee B)$ -Regel gibt mir das alles vor; weil meine Primärannahme $\neg A \vee \neg B$ lautet, muss ich für das »A« der Regel eben $\neg A$ einsetzen, für das »B« $\neg B$ und für das »C« eben jeweils mein gesuchtes $\neg(A \wedge B)$.

Nun schau ich mir die beiden nun zu lösenden Teilerleitungen an. Wie könnte ich unter der Hilfsannahme $\neg A$ [2] die Teilziel-Formel $\neg(A \wedge B)$ [6] gewinnen? Da fällt mir ein, dass ich bereits vorhin als Zielformel für die Ableitung von $\neg(A \wedge B)$ die Regel $(\neg E)$ erwogen habe. Warum also nicht jetzt meine Teilziel-Formel $\neg(A \wedge B)$ [6] dadurch gewinnen? Demnach müsste ich unter meiner Hilfsannahme $\neg A$ [2] eine untergeordnete Hilfsannahme $A \wedge B$ [3] ansetzen (eben das Negat von $\neg(A \wedge B)$, da ich ja $(\neg E)$ benutzen will) und im Raum zwischen dieser Hilfsannahme und meiner Teilziel-Formel $\neg(A \wedge B)$ [6] einen Widerspruch darstellen. Wie? Ich gehe wieder alles Material durch, das mir zur Verfügung steht – nicht viel: nur ggB. Formel, erste und zweite Hilfsannahme. Nun kann ich aus der zweiten Hilfsannahme $A \wedge B$ [3] durch $(\wedge B)$ sehr bequem A und B isolieren; A ist aber ein unmittelbarer Widerspruch zur Hilfsannahme $\neg A$ [2]. Ergo kopiere ich beide mit (R) [4, 5], habe meine Widerspruch und somit die erste Teilerleitung [2–6] abgeschlossen. – Dasselbe Vorgehen wiederhole ich *mutatis mutandis* für die andere Teilerleitung [7–11]. Fertig!

~ ~ ~ : *etc* : ~ ~ ~