Erfüllbarkeit aussagenlogischer Formeln

Einige Bemerkungen

Wahrheitswertzuordnungen

Siehe Schroeder-Heister, *Script* Def. 2.1; Schatz, *Script* 2.4.1; Oberschelp, *Logik für Philosophen* § 9; Smullyan, *First-Order Logic* p. 10.

Hier nur eine vergleichende Bemerkung. Schatz unterscheidet *Belegung* (Def. 2.3: »Eine Funktion *b*, die jedem Aussagensymbol einen der Wahrheitswerte w oder f zuordnet, heißt Belegung«) und *Wahrheitswertzuordnung* (Def. 2.4: »Eine Funktion *F*, die jeder aussagenlogischen Formel einen der Wahrheitswerte w oder f zuordnet, heißt Wahrheitswertzuordnung oder Bewertung«), während Schroeder-Heister gleich von *Bewertung* spricht (Def. 2.1: »Eine Bewertung $\mathscr{I}$ ist eine Funktion, die jedem Aussagesymbol einen der Wahrheitswerte w oder f zuordnet: $\mathscr{I} : \alpha \mapsto \{w, f\}$« – α ist die Menge von Aussagesymbolen $\{A, B, C, \ldots, A_1, \ldots, A_n\}$). Oft ist auch von *Interpretation* die Rede (Smullyan; daher das $\mathscr{I}$). Ausdruck einer solchen Bewertung ist jeweils eine Zeile der Wahrheitstafel.

Die merkwürdige Unterscheidung von »aussagenlogischer Formel« und »aussagenlogischer Form« bei Hoyningen-Huene empfehle ich gleich wieder zu vergessen: sie ist weder verbreitet noch allzu gewinnbringen, sie verwirrt nur.

Zur Schreibweise: $\mathscr{I} \models \varphi$ bedeutet »φ ist wahr unter $\mathscr{I}$«, $\mathscr{I} \not\models \varphi$ bedeutet »φ ist falsch unter $\mathscr{I}$« [Schroeder-Heister, *Script* Def. 2.1] – denn unter einer konkreten Interpretation kann φ immer nur entweder wahr oder falsch sein.

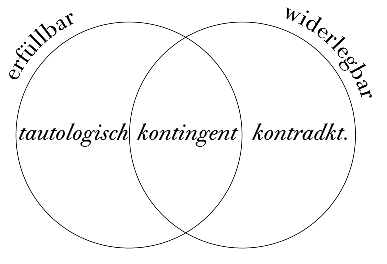
Klassifikation von Formeln nach Erfüllbarkeit

Schroeder-Heister, *Script* Def. 2.2; Schatz, *Script* 2.4.3; Oberschelp, *Logik für Philosophen* § 4; Smullyan 11. Gegenüber Schroeder-Heister und Schatz ergänze ich *widerlegbar*, gegenüber Oberschelp *kontingent*, weil die fünf Begriffe einander erst wechselseitig wirklich erklären. WWZ heißt in der Tabelle *Wahrheitswertzuordnung* bzw. Bewertung, siehe oben.

Eine a.-l. Formel φ heißt	falls φ	Zeichen	Das heißt (Beziehung)	Beispiel für φ
Tautologie/allgemein gültig	unter allen WWZ wahr ist	$\models \varphi$	$\neg$ widerlegbar	$(A \vee \neg A)$
erfüllbar/konsistent	unter mindestens einer WWZ wahr ist	$\not\models \neg\varphi$	$\neg$ kontradiktorisch; Tautologie $\vee$ kontingent	
kontingent	unter mind. einer WWZ wahr *und* unter mind. einer WWZ falsch ist	*(kein Zeichen)*	erfüllbar $\wedge$ widerlegbar; Tautologie $\downarrow$ Kontradiktion	(A)
widerlegbar	unter mindestens einer WWZ falsch ist	$\not\models \varphi$	$\neg$ tautologisch; kontingent $\vee$ Kontradiktion	
Kontradiktion/kontradiktorisch	unter allen WWZ falsch ist	$\models \neg\varphi$	$\neg$ erfüllbar/konsistent	$(A \wedge \neg A)$

Begriffsverhältnisse

Die Menge der *kontingenten* Formeln ist die Schnittmenge der *erfüllbaren* und der *widerlegbaren*, die Menge der *tautologischen* Formeln ist die Menge der *erfüllbaren* weniger jener der *kontingenten* – usw.



Zur Notation

Die Schreibweise erklärt sich wie folgt: $\models \varphi$ bedeutet gleichsam »φ folgt aus der leeren Formel(menge)«, d. h. gilt voraussetzungslos, d. h. ist tautologisch. Ist aber die Negation einer Formel tautologisch, so muss die Formel kontradiktorisch sein, also $\models \neg\varphi$. Damit ist $\models \neg\varphi$ eine weit stärkere Behauptung als $\not\models \varphi$, wie auch die Begriffsumfänge im Schema zeigen.

Diese Klassifikation der Erfüllbarkeit schlechthin ist zwar (wie die Schreibweise zeigt) von der Folgerbarkeit einer Konklusion aus einer Prämissenmenge abgeleitet, aber nicht mit dieser zu verwechseln! Ebenso muss man die Erfüllbarkeit unter einer gegebenen Interpretation (Bewertung, Wahrheitswertzuordnung – s. o.!) unterscheiden: unter einer konkreten Interpretation $\mathscr{I}$ kann φ immer nur entweder wahr oder falsch sein, während diese Klassifikation nach prinzipieller Erfüllbarkeit fragt.